



Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales

**FORMULARIO PARA LA PRESENTACIÓN DE PROGRAMAS DE ASIGNATURAS en
el CONTEXTO DE PANDEMIA por Covid-19¹**

Año Lectivo: 2020

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA**

CARRERA/S: Licenciatura en Matemática

PLAN DE ESTUDIOS: 2008

ASIGNATURA: Medida e Integración

CÓDIGO:2263

MODALIDAD DE CURSADO: Virtual

DOCENTE RESPONSABLE: Claudia Rodriguez. Dra.en Matemática. Profesora adjunta.

Dedicación Exclusiva.

EQUIPO DOCENTE: Stefanía Demaria. Licenciada en Matemática. Ayudante de Primera.

Dedicación Simple.

RÉGIMEN DE LA ASIGNATURA:Cuatrimestral

UBICACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIO: Tercer año, segundo cuatrimestre

RÉGIMEN DE CORRELATIVIDADES:

Asignaturas aprobadas: ---

Asignaturas regulares: Topología

CARÁCTER DE LA ASIGNATURA: Obligatoria

CARGA HORARIA TOTAL: 112 horas

Teóricas:	56 hs	Prácticas:	56 hs	Teóricas - Prácticas:	 hs	Laboratorio:	 hs
------------------	--------------	-------------------	--------------	----------------------------------	----------------	---------------------	----------------

CARGA HORARIA SEMANAL: 8 horas

Teóricas:	4 hs	Prácticas:	4 hs	Teóricas - Prácticas:	 hs	Laboratorio:	 hs
------------------	-------------	-------------------	-------------	----------------------------------	----------------	---------------------	----------------

¹ Res. CS 120/2017 y Res. CD 049/2020



Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales

A. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA ASIGNATURA

Esta asignatura introduce al alumno en la teoría de la medida basada en la teoría de Lebesgue. La integración es un concepto fundamental en matemáticas avanzadas, y los resultados que se imparten en este curso son necesarios en diversas áreas del conocimiento matemático, tales como el análisis, las ecuaciones diferenciales, la teoría de probabilidades, etc.

B. OBJETIVOS PROPUESTOS

Objetivo general

- Que los alumnos comprendan la importancia de la construcción de la teoría de la medida en el marco del desarrollo de la ciencia matemática.
- Desarrolle el pensamiento intuitivo.
- Pueda fundamentar sus conclusiones mediante argumentaciones formales y rigurosas.
- Integre los conocimientos de la asignatura a los conocimientos adquiridos en otros espacios curriculares de la carrera.

Objetivos específicos

Que el estudiante

- Se inicie en el estudio de la teoría de la medida y en la integral de Lebesgue.
- Comprenda la diferencia entre los distintos tipos de convergencia, y establezca relaciones entre ellas.
- Descubra la potencialidad de los resultados más significativos de la asignatura, y pueda manejarlos con soltura.
- Comprenda el significado de medida completa y medida producto, tomando como modelo el proceso de construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
- Se inicie en el estudio del análisis funcional mediante los espacios L_p .
- Establezca relaciones entre algunos conceptos de la teoría de la medida y de la probabilidad.

C. EJES TEMÁTICOS ESTRUCTURANTES DE LA ASIGNATURA Y ESPECIFICACIÓN DE CONTENIDOS

C.1. Contenidos mínimos (según plan de estudio vigente)

Medida de Lebesgue. Funciones medibles. Integral de Lebesgue. Teoremas de paso al límite bajo el signo integral, Lema de Fatou, Teorema de la convergencia mayorada. Teorema de Fubini. Espacios de Banach y de Hilbert. Espacios L_p , con $1 \leq p \leq \infty$. Relación entre la teoría de la medida y la teoría de la probabilidad.

C.2. Ejes temáticos o unidades

Revisión de nociones elementales de $\mathbb{R}^n$. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Medida exterior de Lebesgue y conjunto de Cantor. Conjuntos medibles. Conjuntos borelianos. Conjuntos de medida nula. Estructura de los conjuntos medibles. Conjuntos no medibles. Funciones medibles Lebesgue. Funciones características y funciones simples. Propiedades verdaderas en casi todo punto. Convergencia en casi todo punto y convergencia en medida. Integral de Lebesgue. Teoremas de paso al límite bajo el signo integral. Comparación con la integral de Riemann. Integración parcial: teorema de Fubini. Los espacios L_p , con $1 \leq p \leq \infty$. Términos probabilísticos. Eventos independientes y sus propiedades. Ley de los grandes números.



Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales

D. ACTIVIDADES A DESARROLLAR

D.1. Actividades en modalidad virtual (modalidades alternativas a la presencialidad).

CLASES TEÓRICAS: Representan aproximadamente el 50% de la carga total de la asignatura. En ellas se introducen los conceptos fundamentales de la materia, poniendo énfasis en las ideas centrales. Se incentiva permanentemente la participación de los alumnos, a la vez que se los induce a relacionar los nuevos temas con los conceptos desarrollados en otras asignaturas. 4 horas semanales

UNIDAD 0: *Preliminares*. Repaso de las nociones de recta extendida, supremo e ínfimo. Definición y propiedades de límite inferior y superior de una sucesión de números, de una sucesión de conjuntos y de una función. Funciones semicontinuas. Nociones elementales de $\mathbb{R}^n$.

UNIDAD 1: *Medida de Lebesgue*. Contexto histórico: ¿cómo surge la medida e integral de Lebesgue?. Medida exterior de Lebesgue y medida de Lebesgue: Propiedades. El conjunto de Cantor: propiedades. Conjuntos medibles. Propiedades. Conjuntos de medida nula. σ -álgebras. Conjuntos borelianos. Estructura de los conjuntos medibles. Sucesiones monótonas de conjuntos medibles. Invariancia bajo traslaciones. Existencia de conjuntos no medible: conjunto de Vitali.

UNIDAD 2: *Funciones medibles Lebesgue* Funciones medibles. Propiedades elementales de las funciones medibles. Sucesiones de funciones medibles. Funciones características y funciones simples. Propiedades verdaderas en casi todo punto. Convergencia en casi todo punto, convergencia en medida y relación entre ambas. Teorema de Egorov y Lusin. Función singular de Cantor.

UNIDAD 3: *Integral de Lebesgue*. Definición de la integral para una función no negativa. Propiedades. Integrales de funciones simples. Paso al límite bajo el signo integral. Integral de funciones con valores de distinto signo. Propiedades. La integral y los conjuntos de medida nula. Teorema de la convergencia monótona, convergencia uniforme y convergencia mayorada. Comparación con la integral de Riemann. Invariancia bajo traslaciones. La integral como función de conjunto.

UNIDAD 4: *Teorema de Fubini*. Teorema de Fubini. Teorema de Tonelli. Aplicaciones del Teorema de Fubini. La convolución. Propiedades.

UNIDAD 5: *Espacios L_p* Espacios L_p , con $0 < p < \infty$. Funciones esencialmente acotadas. Espacios L_p , con $0 < p \leq \infty$. Noción de espacio de Banach y espacio de Hilbert. Funciones de cuadrado integrable.

UNIDAD 6: *Relación entre teoría de la medida y teoría de probabilidad*

Medidas abstractas. Propiedades. Espacios de medida finitos y σ -finitos. Medias completas. Medida producto. Teorema de Fubini para medidas abstractas. Términos probabilísticos. Eventos independientes y sus propiedades. Ley de los grandes números, distintas versiones.

CLASES PRÁCTICAS: En las clases prácticas se resuelven guías de ejercicios en los cuales los estudiantes pueden afianzar los conceptos nuevos, y profundizar así el desarrollo de metodologías en el trabajo matemático. 4 horas semanales

Se trabaja con las siguientes guías de ejercicios:

Trabajo Práctico 1: *Preliminares*.

Trabajo Práctico 1 continuación: *Medida de Lebesgue*.



Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales

Trabajo Práctico 2: *Funciones medibles.*

Trabajo Práctico 3: *Integral de Lebesgue.*

Trabajo Práctico 4: *Teorema de Fubini.*

Trabajo Práctico 5: *Espacios L_p , $1 \leq p \leq \infty$*

Trabajo Práctico 6: *Relación entre teoría de la medida y de la probabilidad.*

CLASES DE TRABAJOS PRÁCTICOS DE LABORATORIO: ---

OTRAS:

D.2. Actividades en la presencialidad -----

CLASES TEÓRICAS: ----

CLASES PRÁCTICAS: ----

CLASES DE TRABAJOS PRÁCTICOS DE LABORATORIO: ----

OTRAS: ----

E. PROGRAMAS Y/O PROYECTOS PEDAGÓGICOS INNOVADORES E INCLUSIVOS

F. CRONOGRAMA TENTATIVO DE CLASES E INSTANCIAS EVALUATIVAS a realizar en la virtualidad y en la presencialidad

F.1. Cronograma tentativo de clases e instancias evaluativas a realizar en la virtualidad.

Semana	Día/Fecha	Teóricos	Prácticos	Parciales / Recuperatorio
1	25,27/8	Unidad 0 y Unidad 1.	Práctico 0	
2	1,3/9	Unidad 1.	Práctico 1	
3	8,10/9	Unidad 1.	Práctico 1	
4	15,17/9	Unidad 1 y 2.	Práctico 1	Ejercicio domiciliario 1
5	22,24/09	Unidad 2.	Práctico 2	
6	29/09 - 1/10	Unidad 2.	Práctico 2	Ejercicio domiciliario 2
7	6,8/10	Unidad 3.	Práctico 3	
8	13,15/10	Unidad 3.	Práctico 3	
9	20,22/10	Unidad 4.	Práctico 3	Ejercicio domiciliario 3
10	27,29/10	Unidad 4 y Unidad 5.	Práctico 4	
11	3,5/11	Unidad 5.	Práctico 4 y 5	Ejercicio domiciliario 4
12	10,12/11	Unidad 5 y Unidad 6	Práctico 5	Ejercicio domiciliario 5
13	17,19/11	Unidad 6	Práctico 5 y 6	17/11 Parcial
14	24,26/11		Práctico 6	24/11 Recuperatorio



Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales

F.2. Cronograma tentativo de clases e instancias evaluativas a realizar en la presencialidad.

Semana	Día/Horas	Actividad: tipo y descripción*
---	---	-----

*Teóricos, teóricos-prácticos, trabajos de laboratorios, seminarios, talleres, coloquios, instancias evaluativas, consultas grupales y/o individuales, otras.

G. BIBLIOGRAFÍA

G.1. Bibliografía obligatoria y de consulta (por lo menos algún material bibliográfico debe ser de edición 2012 o posterior).

- Measure and Integral: An introduction to Real Analysis. Wheeden, Zygmund. CRC Press. Second edition. 2015.
- A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration. David Bressoud. Cambridge University Press. 2008.
- Medida e Integral de Lebesgue. Fava, Zó. Red Olímpica, 1996.
- Real Analysis. Folland, John Wiley & sons, Inc, 1999
- <http://kolmogorov.unex.es/~montalvo/apuntes> , capítulos 17 al 27
- http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/soria/TIM/integral_03.html

G.2. Plataformas/herramientas virtuales; materiales audiovisuales, otros.

Classroom, Google meet, SIAL

H. DÍA Y HORARIOS DE CLASES VIRTUALES y PRESENCIALES

Teóricos: Martes y Jueves de 14 a 16 hs,

Prácticos: Martes y Jueves de 16 a 18 hs.

I. DÍA Y HORARIO DE CLASES DE CONSULTAS VIRTUALES y PRESENCIALES

Viernes 18 hs y Martes 18 hs

J. REQUISITOS PARA OBTENER LA REGULARIDAD Y LA PROMOCIÓN

Condiciones de regularidad. Para regularizar la asignatura el alumno deberá:

Entregar la solución de un ejercicio propuesto por los docentes (ejercicio domiciliario) al finalizar cada trabajo práctico (5 en total), el cual será obligatorio, y tendrá 24 hs para completarlo. De los 5 ejercicios domiciliarios, el alumno deberá tener al menos 3 ejercicios bien resueltos.



*Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales*

Aprobar una instancia de evaluación (Parcial) o su recuperatorio al finalizar el cuatrimestre. Dicha instancia de evaluación será en forma virtual, escrita, a través de una reunión en la plataforma google meet. Para aprobar el parcial el alumno debe sumar un porcentaje de al menos el 50% del puntaje.

Promoción: No hay.

K. CARACTERÍSTICAS, MODALIDAD Y CRITERIOS DE LAS INSTANCIAS EVALUATIVAS

Ejercicios domiciliarios y Parcial: Los ejercicios domiciliarios y los del parcial, serán ejercicios del tipo de la práctica, donde el alumno deberá mostrar un manejo de los diferentes conceptos y resultados desarrollados en cada unidad. E examen parcial y su recuperatorio se realizará en forma virtual y será un examen escrito, a través de una reunión en la plataforma google meet. Para aprobar el parcial el alumno debe sumar un porcentaje de al menos el 50% del puntaje.

Evaluación Final: El examen final para alumnos regulares consiste en un examen oral (presencial) sobre los contenidos de la asignatura: definiciones, propiedades, ejemplos, demostraciones. La aprobación se obtiene con un mínimo del 50%. El examen final para alumnos libres consta de dos partes: un examen de la parte práctica (escrito, que equivaldría a los ejercicios domiciliarios y del parcial que se toman para obtener la regularidad) y uno de la parte teórica, de similares características al examen final de un alumno regular.

Firma Profesor/a Responsable

Firma Secretario/a Académico/a