



Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales



UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CARRERA: Licenciatura en Matemática

PLAN DE ESTUDIOS: 2008

ASIGNATURA: Geometría Diferencial

CÓDIGO: 1915

DOCENTE RESPONSABLE: Dr. Julio César Barros

EQUIPO DOCENTE: Dr. Julio César Barros

AÑO ACADÉMICO: Primer cuatrimestre 2017

REGIMEN DE LA ASIGNATURA: Cuatrimestral

RÉGIMEN DE CORRELATIVIDADES:

| Para cursar | | Para Rendir |
|-------------|-------------------------------|-------------------------|
| Aprobada | Regular | Aprobada |
| Topología | Álgebra Lineal Aplicada | Álgebra Lineal Aplicada |

CARGA HORARIA TOTAL: 120 horas

TEÓRICAS: 4 hs (semanales) PRÁCTICAS: 4 hs (semanales)

CARÁCTER DE LA ASIGNATURA: Obligatoria

A. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA ASIGNATURA

Primer Cuatrimestre de Cuarto Año de la carrera.

B. OBJETIVOS PROPUESTOS

- Desarrollar la capacidad de interpretar geoméricamente enunciados de propiedades dadas analíticamente, como así también de formular en términos matemáticos situaciones geométricas.
- Aplicar los conceptos básicos de la Geometría Diferencial de Curvas y Superficies en la resolución de problemas.

C. CONTENIDOS BÁSICOS DEL PROGRAMA A DESARROLLAR

- **Ejes estructurantes:** Curvas en el espacio – Superficies – Geometría intrínseca.
- **Contenidos Básicos:** Geometría de curvas y superficies. Geometría riemanniana intrínseca. El Teorema de Gauss Bonnet. Aplicaciones a la física.

D. FUNDAMENTACIÓN DE LOS CONTENIDOS

La asignatura Geometría Diferencial está destinada a estudiantes que ya han concluido los primeros cursos de, Cálculo en varias variables (Cálculo III), Álgebra Lineal, Álgebra Lineal Aplicada y Topología. Esta asignatura tiene como propósito introducir al estudiante a los conceptos y resultados más importantes de la geometría diferencial. El criterio de selección es, presentar contenidos con una visión y estilo matemático que favorezca el ensamble con otros cursos más avanzados del área de la geometría diferencial como por ejemplo *Varietades Diferenciables*, *Geometría Riemanniana*, etc. Y que a su vez se relacione con contenidos ya estudiados en otras asignaturas.

En la primera unidad, se establece la terminología y notación a seguir en el resto del curso. Este lenguaje ya es parcialmente conocido por los alumnos que ya han transitado por cursos de Cálculo en varias variables y Álgebra Lineal pero al cual se le incorpora un plus propiamente geométrico.

La segunda unidad, describe el método de marcos móviles de referencia, que se expone, para estudiar las curvas en el espacio. Se definen dos medidas que caracterizan las curvas en el espacio, a saber, *la curvatura* y *la torsión*.

En la unidad tres, se investigan los movimientos rígidos del espacio que permiten definir la congruencia de curvas o de superficies en el espacio tridimensional.

La cuarta unidad, presenta una definición apropiada de superficie regular, en su versión más moderna (y que permite una rápida generalización a las denominadas *variedades diferenciables*). Se demostrará que a cada superficie le corresponde un cálculo diferencial e integral propio de ella y en total analogía con el bien conocido (por parte de los alumnos), cálculo en el plano. Se presentan además las propiedades topológicas de las superficies, lo cual permite hacer conexión con otra asignatura de la carrera como lo es la Topología.

La unidad cinco, tiene por objetivo subrayar los aspectos *intuitivos y de cálculo*, a fin de darle sentido geométrico a la teoría desarrollada. Se presenta aquí el concepto de *Operador de Forma*, también denominado *Operador de Weingarten*, éste resulta un operador lineal, autoadjunto, cuyos *invariantes algebraicos*: traza y determinante, adquieren un significado geométrico propio en la caracterización de una superficie es decir su *curvatura media y gaussiana*, respectivamente.

En la unidad seis, se presenta una geometría, *tal como la verían los habitantes de la superficie*, sin suponer que la superficie en cuestión se encuentra embebida en el espacio tridimensional. Se presenta además el célebre *Teorema Egregium de Gauss*.

La unidad siete, tiene por objetivo mostrar que el *Operador de Forma* constituye una analogía en una superficie, como lo serían la curvatura y la torsión para una curva en el espacio. Al hacer suposiciones sencillas acerca de la curvatura y la torsión se pudieron caracterizar ciertos tipos especiales de curvas. De forma análoga se impondrán ciertas condiciones al operador de forma y se caracterizan ciertas superficies.

Las competencias que se desean favorecer (en relación al perfil del egresado, su práctica profesional y alcance del título) con la metodología de trabajo en esta asignatura son: Dotar al alumno con un alto conocimiento técnico. Capacitarlo para el uso de las herramientas matemáticas en la resolución de problemas científicos y/o tecnológicos. Brindar al alumno conocimientos sólidos en la disciplina matemática que le permita acceder a carreras de posgrado y/o participar en grupos de trabajo interdisciplinario. Desarrollen los elementos básicos del trabajo de la ciencia matemática contemplando el tratamiento de los contenidos fundamentales desde diversos aspectos: conceptuales, lógicos, históricos, numéricos y/o gráficos. Desarrollar una profundización en la formación específica en un área de la Matemática, de acuerdo a sus intereses personales y coherentes con alguna de las áreas en desarrollo en el Departamento de Matemática. Requisitos Previos: Los alumnos que cursen esta asignatura deben conocer y saber operar con los siguientes conceptos.

Cálculo III (varias variables): Campos escalares y vectoriales. Derivadas parciales. Gradiente. Matriz Jacobiana. Teorema de la función inversa.

Álgebra Lineal: Base y dimensión de espacios vectoriales. Transformaciones Lineales. Matriz asociada a una transformación lineal. Espacio Dual.

Álgebra Lineal Aplicada: Autovalores y autovectores. Matriz de una traslación, rotación y reflexión.

Topología: Espacio topológico. Conjuntos abiertos, cerrados, compactos y conexos.

E. ACTIVIDADES A DESARROLLAR

CLASES TEÓRICAS: Las clases teóricas tienen una duración de 2 horas y una frecuencia semanal de 2 clases por semana (total 4 hs semanales). En éstas clases se inducirán las definiciones y conceptos fundantes de la geometría diferencial mediante ejemplos apropiados que recorten apropiadamente el concepto y/o definición a transmitir. Haciendo especial énfasis en la relación entre el lenguaje geométrico y el analítico. Se puntualizará la relación con otras asignaturas que el alumno ya cursó como, Cálculo en varias Variables, Álgebra lineal y Topología. Se mostrará como éstas áreas permiten la construcción de nuevos objetos como por ejemplo: derivada covariante,

operador forma etc. Objetos estos, que permiten analizar las propiedades de las curvas y superficies en el espacio tridimensional.

Se demostrarán los resultados que sustenta la teoría de la geometría diferencial, se hará una amplia ejemplificación y se mostrarán las principales aplicaciones de estos resultados tanto en el área de estudio, como de aplicación en la física.

CLASES PRÁCTICAS: Las clases prácticas tienen una duración de 2 horas y una frecuencia semanal de 2 clases por semana (total 4 hs semanales). En las clases prácticas los alumnos resolverán guías de problemas. Los problemas tienen por objetivo afianzar los resultados de la teoría como así también, modelizar situaciones geométricas. Se pretende además con la resolución de problemas que el alumno desarrolle la capacidad de interpretar en lenguaje geométrico los enunciados dados en forma analítica y viceversa. Se aprenderá el uso de algún software de libre acceso que permita graficar y calcular.

CLASES DE CONSULTAS: Los alumnos dispondrán de 2 horas semanales de consultas tanto de aspectos teóricos como prácticos de la asignatura.

F. NÓMINA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

- 1) **El cálculo en el espacio Euclidiano.**
- 2) **Campos de sistemas de referencia.**
- 3) **Isometrías, Cartas y Superficies regulares.**
- 4) **Funciones diferenciables y vectores tangentes.**
- 5) **Mapeos de superficies y propiedades topológicas.**
- 6) **Operador de Forma.**

G. HORARIOS DE CLASES:

Teóricos: Martes de 8 a 10 hs. Jueves de 8 a 10 hs.

Prácticos: Martes de 10 a 12 hs. Jueves de 10 a 12 hs.

HORARIO DE CLASES DE CONSULTAS: Lunes de 14 a 15 hs.
Miércoles de 14 a 15 hs.

H. MODALIDAD DE EVALUACIÓN:

- **Evaluaciones Parciales:** Se examinará al alumno en dos instancias. El primer examen parcial escrito versará sobre problemas del tipo desarrollado en los prácticos 1, 2, 3 y primera mitad de 4. El segundo examen parcial escrito versará sobre problemas del tipo desarrollado en los prácticos 4 segunda mitad, 5 y 6.
- **Evaluación Final:**
- **Alumnos regulares:** el examen final será oral y versará sobre los aspectos teóricos desarrollados en el curso.

- **Alumnos libres:** el alumno deberá rendir un examen escrito que versará sobre problemas del tipo desarrollado en los trabajos prácticos. Aprobada esta instancia deberá rendir examen oral que versará sobre los aspectos teóricos de la asignatura.
- **CONDICIONES DE REGULARIDAD:** Para regularizar esta asignatura el alumno deberá tener una asistencia del 80% a las clases prácticas y aprobar dos exámenes parciales. Cada examen parcial puede ser recuperado una vez.
- **CONDICIONES DE PROMOCIÓN:** No hay promoción.

PROGRAMA ANALÍTICO

A. CONTENIDOS

- **Unidad 1: El cálculo en el espacio Euclídeo.** Espacio euclídeo. Función diferenciable. Vectores tangentes. Espacio tangente. Campo vectorial. Derivadas direccionales. Curvas regulares. Parametrizaciones. 1-Formas. Diferencial de una función. Teorema de la función inversa.
- **Unidad 2: Campos de sistema de referencia.** Curvas. Longitud de arco. Rapidez unitaria. Campo vectorial en una curva. Fórmulas de Frenet. Campos de sistema de referencia de Frenet. Curvatura. Torsión. Curvas de rapidez arbitraria. Derivada covariante.
- **Unidad 3: Geometría Euclídea.** Isometrías. El mapa de derivadas de una isometría. Orientación. Congruencia de curvas.
- **Unidad 4: El cálculo en una superficie.** Cartas coordenadas. Cartas propias. Superficies regulares. Cartas de Monge. Superficies definidas implícitamente. Superficies de revolución. Parametrización de una región de una superficie. Funciones diferenciables en una superficie. Vectores tangentes. Plano tangente. Vector normal. Campo vectorial normal. Diferenciabilidad. Mapeo regular de superficies. Difeomorfismo. Primera forma fundamental. Coeficientes de la primera forma fundamental. Longitud de arco. Ángulo entre curvas. Área. Propiedades topológicas de las superficies.
- **Unidad 5: Operador de Forma.** El operador de forma. Simetría del operador forma. Curvatura normal. Secciones normales. Curvaturas principales. Valores y vectores característicos. Fórmula de Euler para la curvatura normal. Curvatura Gaussiana y curvatura media. Puntos elípticos, hiperbólicos, parabólicos y llanos. Superficie llana y mínima. Operador forma en término de cartas. Segunda forma fundamental en coordenadas locales. Coeficientes de la segunda forma. Líneas de curvatura. Direcciones asintóticas y curvas asintóticas. Geodésicas.
- **Unidad 6: Geometría intrínseca de las superficies.** El teorema Egregium de Gauss. Ecuaciones de Codazzi, Mainardi y Peterson. Ecuaciones de compatibilidad. Teorema fundamental de superficies.
- **Unidad 7: Geometría diferencial global.** Algunos teoremas globales. Rigidez de la esfera. Lema de Hilbert. Teorema de Liebmann. Teorema de Gauss – Bonnet.

B. CRONOGRAMA DE CLASES Y PARCIALES

| Semana | Teóricos | Prácticos | Día/ Fecha | Parciales / Recuperatorios |
|--------|----------|------------|---------------|-------------------------------|
| 1 | Unidad 1 | Práctico 1 | | |
| 2 | Unidad 1 | Práctico 1 | | |
| 2 | Unidad 2 | Práctico 2 | | |
| 3 | Unidad 2 | Práctico 2 | | |
| 4 | Unidad 3 | Práctico 3 | | |
| 5 | Unidad 4 | Práctico 4 | | |
| 6 | Unidad 4 | Práctico 4 | | |
| 7 | | | Martes | Primer Parcial |
| 8 | Unidad 4 | Práctico 4 | | |
| 9 | Unidad 5 | Práctico 5 | | |
| 10 | Unidad 5 | Práctico 5 | | |
| 11 | Unidad 5 | Práctico 5 | | |
| 11 | Unidad 6 | Práctico 6 | | |
| 12 | Unidad 6 | Práctico 6 | | |
| 13 | | | Martes | Segundo Parcial |
| 13 | Unidad 7 | Unidad 7 | | |
| 14 | Unidad 7 | Unidad 7 | | |
| 14 | | | Jueves | Recuperatorio |
| | | | Martes | Recuperatorio |

C. BIBLIOGRFÍA

Obligatoria:

- **Costa, A. – Gamboa, M. – Porto, A.** *Notas de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Editorial Sanz y Torres. Madrid. (2005)
- **Do Carmo, Manfredo.** *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Editorial. (1995)
- **Hernández Cifre, M – Pastor González, J.** *Un curso de Geometría Diferencial*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid 2010.
- **O'Neill, Barrett.** *Geometría Diferencial*. Editorial Limusa. México. (1990)
- **Barros, Julio C.** *Notas de Clase de Geometría Diferencial*. Versión 2017.

De consulta:

- **Do Carmo, Manfredo.** *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. (2010)
- **Do Carmo, Manfredo.** *Differential Forms and Applications*. Springer Verlag.(1991)
- **Lipschutz, Martin.** *Teoría y problemas de geometría diferencial*. McGraw-Hill. México. (1971)
- **Spivak, Michael.** *Calculus on Manifolds. A modern approach to classical theorem of advanced calculus*. W. A. Benjamin, inc. (1965)
- **Stoker, J.J,** *Differential Geometry*. Wiley – Interciencia. New York. (1969)